معادلات ماكسويل :

وجدنا سابقاً لبعض الظواهر الفيزيائية التي لها علاقة بالشحنات الكهربائية في ... نسبب مجال كهربائي مستقر او شحنات كهربائية متحركة بسرعة ثابتة (تيار مستقر) والتي ينشأ عنها مجال مغناطيسي مستقر . وجدنا سابقاً :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (1)$$

وسندرس الآن ظواهر فيزيائية لها علاقة بالمجالات الكهربائية والمغناطيسية عندما تكون هذه المجالات متغيرة بالنسبة للزمن وسنجد ان المعادلة (1) لا تصبح صحيحة في الحالة الاولى بدراسة هذه المجالات الكهربائية والمغناطيسية .

- معادلات ماكسويل

ينص قانون الحث لفاراداي ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة (الحثية) في دائرة تساوي المعدل الزمني للتدفق المغناطيسي الذي يقطع هذه الدائرة اي

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (2)$$

كما ان القوة الدافعة (المحركة) الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي للمجال الكهربائي في تلك الدائرة

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

ان معدل تغير التدفق المغناطيسي بالنسبة للزمن في قانون الحث لفاراداي قد يكون ناتجاً عن تغير المساحة التي يقطعها المجال المغناطيسي بالنسبة للزمن او ان تتغير كثافة التدفق المغناطيسي $\vec{B}$ بالنسبة للزمن حيث ان $\psi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$.

فاذا كانت $\vec{B}$ هي المتغيرة بالنسبة للزمن (والسطح ثابت) فان قانون الحث لفاراداي يكتب في الشكل الآتي :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (4)$$

وذلك لان ... التفاضل بالنسبة للزمن ... تغير السطح ... (3) .

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (5)$$

وباستخدام مبرهنة ستوكس نحصل على :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (6)$$

وبما ان التكامل السطحي للطرفين متساوي فيجب ان :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (7)$$

تسمى هذه العلاقة بقانون الحث لفاراداي في صيغته التفاضلية وهي اولى معادلات ماكسويل

نعلم مسبقاً أن التكامل الخطي لكثافة الفيض المغناطيسي $\vec B$ حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الذي يحتويه المسار المغلق وهذا هو قانون أمبير وصيغة التكامل هي

$$\oint \vec B \cdot d\vec l = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \vec J \, ds$$

ويمكن كتابة هذا القانون بشكل آخر عند استعمال نظرية ستوكس كما يلي.

$$\oint \vec B \cdot d\vec l = \int_s (\vec\nabla\times\vec B)\, d\vec s = \mu_0 \int_s \vec J\cdot d\vec s$$

ومنه نستنتج أن

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0 \vec J$$

وعندما نأخذ تفرق طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\vec\nabla\cdot\vec J = \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = 0$$

وذلك لأن تفرق أي دوار يساوي صفراً (متطابقة). وبالعودة إلى معادلة حفظ الشحنة $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec\nabla\cdot\vec J$ نستنتج أن $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ وهذا ما لاحظه ماكسويل حيث لاحظ وأكد أن هذه الحقيقة تصح فقط للحالات المستقرة وهي لا تصح في حالة الحالات المتغيرة مع الزمن. لذلك اقترح ماكسويل إضافة حد آخر إلى قانون أمبير لكي يمكن استعماله في جميع الحالات. وقد افترض أن هذا الحد هو $\vec\alpha$ وعليه نكتب قانون أمبير على النحو الآتي

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J + \vec\alpha \qquad (8)$$

ومن ثم

$$\vec\nabla\cdot\vec J = \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B - \vec\alpha) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\vec\alpha = -\frac{\partial\rho_f}{\partial t}$$

ولكن

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\cdot\vec D) = \nabla\cdot\frac{\partial D}{\partial t}$$

حيث D هو متجه الإزاحة الكهربائي ($D=\varepsilon E$).

إذن نستنتج مما تقدم أن

$$\vec\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\cdot\vec\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \mu_0\frac{\partial D}{\partial t}$$

وباستعمال هذه العلاقة في المعادلة (8) نحصل على

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\left(\vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}\right)$$

أو أن

$$\vec\nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (9)$$

حيث $\vec B = \mu_0\vec H$ (H هو المجال المغناطيسي).

إن إضافة الحد $\frac{\partial D}{\partial t}$ والذي سمي فيما بعد تيار الإزاحة يعد الإضافة المهمة التي ساهم بها ماكسويل في دراسته موضوعي الكهربائية والمغناطيسية. ونعني بالعلاقة الأخيرة

المجال المغناطيسي ليس ناشئاً فقط من وجود تيار التوصيل الاعتيادي وإنما قد ينشأ عند وجود مجال كهربائي متغير كما هي الحالة عند تغير المجال الكهربائي بين لوحي مكثفة في حالة شحن هذه المكثفة، وتفريغها او بعبارة اخرى تيار مساوي لتغير المجال الكهربائي بين لوحي المكثفة بصورة مستمرة. وتعد المعادلة (9) هي ثاني معادلات ماكسويل.

ولقد عرفنا سابقاً أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ وهذه تعد المعادلة الثالثة لماكسويل

أما المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل فهي المعادلة التالية:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$$

حيث ρ_f كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة في وسط عازل ما. وبذلك يمكن كتابة معادلات ماكسويل كالآتي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (a)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (b) \qquad (10)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (c)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \quad (d)$$

مع العلم أن $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ وان ε و μ هي سماحية الوسط ونفاذية الوسط

– معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهد العددي Φ والجهد المتجهي $\vec{A}$.

عند التعامل مع مجالات كهربائية ومغناطيسية متغيرة مع الزمن فإننا لا يمكن أن نستعمل العلاقات الخاصة بالمجالات المستقرة لأسباب أن $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ لا يساوي صفراً وأن $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ تختلف قيمته في حالة المجالات المتغيرة بالنسبة للزمن عما هو عليه في المجالات المستقرة. وبما أن العلاقة $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ تصح في كل الحالات وأن تفرق دوار أي متجه يساوي صفراً، لذلك وكما بينا سابقاً يمكن أن نعرف المتجه $\vec{B}$ بدلالة الجهد المتجهي كالآتي:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

وعلى هذا الأساس يمكن أن نعرف المتجه $\vec{E}$ بدلالة كل من الجهد العددي والجهد المتجهي كالآتي:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11)$$

فإذا كانت $\vec{B}$ ثابتة القيمة فإن $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ يساوي صفراً أي أن $\vec{E} = -\nabla\Phi$ كما هو عليه الحال في الكهربائية المستقرة. أما إذا أخذنا دوار طرفي المعادلة (11) فإننا نحصل على معادلة ماكسويل الأولى كالآتي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) - \nabla\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (12)$$

وبما أن $\nabla\times(\nabla\Phi) = 0$, وأن

$$\vec{\nabla}\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

فإن المعادلة (12) تأخذ الشكل التالي الذي يمثل معادلة ماكسويل الأولى

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$